تمارين حول الفصل الثالث
المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة والتي ترد
إلى معادلات تفاضلية ذات معاملات ثابته.

[1] بإجراء التغيير المناسب على المتغير المستقل حوّل المعادلة التفاضلية التالية إلى معادلة تفاضليه ذات معاملات ثابته،
ثم أوجد الحل العام لها.
$$y'' - \cot x\, y' - \sin^2 x\, y = \cos x - \cos^3 x$$

الحل:

المعادلة التفاضلية المعطاة من الشكل: $y'' + P(x) y' + Q(x) y = f(x)$
بأخذ التحويل: $w = \int \sqrt{-Q(x)}\, dx$ تتحول المعادلة التفاضليه المعطاة
إلى الشكل:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + k \cdot \frac{dy}{dw} - y = -\frac{f(x)}{Q(x)}.$$

$$w = \int \sqrt{-(-\sin^2 x)}\, dx = \int \sin x\, dx = -\cos x$$

لنوجد k:

لدينا
$$w = -\cos x$$
$$\frac{dw}{dx} = \sin x$$
$$\frac{d^2w}{dx^2} = \cos x$$

$$k = \frac{\frac{d^2w}{dx^2} + P(x)\frac{dw}{dx}}{\left(\frac{dw}{dx}\right)^2} = 0$$

عندها التغيير بالمتغير/المستقل $w = -\cos x$ يحولها إلى الشكل:

$$\frac{d^2y}{dw^2} - y = -w \quad \text{-------- } (*)$$

وهذه المعادلة معادلة تفاضليه ذات
معاملات ثابته نحلها كما تعلمنا سابقاً في الفصل الثاني.

لإيجاد حلها: الحل العام $y = y_h + y_p$

لإيجاد y_h:

(2)

المعادلة المتجانسة المناظرة لـ هي : $\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} - y = 0$ ومعادلتها المميزة $m^2 - 1 = 0$ جذور هذه المعادلة : $m_1 = 1$ and $m_2 = -1$

إذن فالحل العام لـ هو :

$$y_h = A_1 e^{w} + A_2 e^{-w}$$

لنوجد y_p نعني الحل الخاص وفق المؤثر التفاضلي العكسي :

للمعادلة الغير متجانسة تكتب باستخدام المؤثر التفاضلي D بالشكل :

$$(D^2 - 1)\, y = -w$$

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{D^2 - 1}$ فيكون الحل الخاص لـ :

$$y_p = -\frac{1}{D^2 - 1} w = \frac{1}{1 - D^2} w$$

$$(1 + D^2)\, w = w + 0 = w$$

$$y_p = w$$

الحل العام لـ (*)

$$y = A_1 e^{w} + A_2 e^{-w} + w$$

فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$y = A_1 e^{-\cos x} + A_2 e^{\cos x} - \cos x$$

** ** ** **

4) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية وذلك بعد تحويلها إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة محققة باعتماد التغيير المناسب على المتحول المستقل.

$$xy'' - y' + 4x^3 y = x^5$$

الحل:

المعادلة تكتب بالشكل النظامي على النحو:

$$y'' - \frac{1}{x}y' + 4x^2 y = x^4$$

$$w = \int \sqrt{4x^2}\, dx = 2\int x\, dx = x^2$$

$$\frac{dw}{dx} = 2x \quad \wedge \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 2$$

$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2} + P(x)\frac{dw}{dx}}{\left(\frac{dw}{dx}\right)^2} = \ldots\ldots = 0$$

فالمعادلة تتحول إلى الشكل:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + y = \frac{1}{4}w \quad \ldots\ldots (*)$$

وهي معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة الحل العام لها

$$y = y_h + y_p$$

لنوجد y_h:

$(D^2+1)\,y = 0$ $\xrightarrow{\text{المعادلة المميزة}}$ $m^2+1=0$ $\xrightarrow{\text{الجذور}}$ $m_1 = i$, $m_2 = -i$

فالحل العام يعطى على النحو:

$$y_h = A_1 \cos w + A_2 \sin w$$

(الجذور عقدية غير مكررة)

لإيجاد الحل الخاص لـ (أي للمعادلة (*)): نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي $\frac{1}{D^2+1}$ بعد كتابتها على الشكل:

$$(D^2+1)\,y = \frac{1}{4}w$$

$$y_p = \frac{1}{4}\frac{1}{1+D^2}w = \frac{1}{4}[1-D^2]\,w = \frac{1}{4}[w-0] = \frac{1}{4}w$$

وبالتالي:

$$y = A_1 \cos w + A_2 \sin w + \frac{1}{4}w$$

فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$y = A_1 \cos x^2 + A_2 \sin x^2 + \frac{1}{4} x^2$$

** ** ** **

مثال أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية بعد تحويلها إلى معادلة ذات معاملات ثابتة وذلك بإجراء التغيير المناسب على المتحول المستقل:

$$x^4 y'' + 2x^3 y' + y = 1 + \frac{1}{x}$$

الحل:

المعادلة تكتب على النحو:
$$y'' + \frac{2}{x} y' + \frac{1}{x^4} y = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{-2}{x^3}$$

$$k = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P(x)\frac{\partial w}{\partial x}}{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = \frac{-\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x}\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = 0 \qquad k = 0$$

بالتالي فإن المعادلة تصبح على الشكل:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + y = \frac{F(x)}{Q(x)} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + y = 1 - w \quad \text{......} (*)$$

ملاحظة: لنحسب المقدار $\frac{F(x)}{Q(x)}$:

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^4}} = \frac{\frac{x+1}{x^5}}{\frac{1}{x^4}} = \frac{x^4(x+1)}{x^5} = \frac{1}{x}(x+1) = 1 + \frac{1}{x} = 1 - w$$

المعادلة الناتجة (*) معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة

$$y_h = A_1 \cos w + A_2 \sin w$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}(1-w) \Rightarrow y_p = [1 - D^2](1-w) = 1 - w$$

الحل العام لـ $*$: $A_1 \cos w + A_2 \sin w + 1 - w$

$\Leftarrow$ الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة:

$$y = A_1 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + A_2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1 + \frac{1}{x}.$$

** ** ** **

/ /

٤ ـ أوجد الحل العام للمعادلة التّفاضلية: $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = x^3(1+e^x)$
وذلك بعد تحويلها إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة [redacted] بإجراء
تغيير مناسب على المتغير التّابع.

ـ الحل:

المعادلة تكتب على الصيغة: $y'' - \frac{2}{x}y' + (1+\frac{2}{x^2})y = x(1+e^x)$

$$P(x) = \frac{-2}{x} \longrightarrow P'(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$Q(x) = 1 + \frac{2}{x^2}$$

$$Q(x) - \frac{1}{4}P^2(x) - \frac{1}{2}P'(x) =$$

$$1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{x^2}\right) = 1$$

بالتّالي خلال التّحويل $y = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)\,dx}\cdot v$

يحول المعادلة التّفاضلية إلى الشكل: $v'' + kv = f(x)\, e^{\frac{1}{2}\int P(x)\,dx}$

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int -\frac{2}{x}dx}\cdot v = e^{\ln x}v = xv \qquad y = xv$$

تحولها إلى الشكل:

$$v'' + v = x(1+e^x)\, e^{\frac{1}{2}\int -\frac{2}{x}dx}$$

$$v'' + v = x(1+e^x)\, e^{-\int \frac{dx}{x}} = x(1+e^x)\, e^{-\ln x}$$

$$v'' + v = 1 + e^x \quad (*)$$

الحل العام لا هو: $v = v_h + v_p$

$$v'' + v = 0 \xrightarrow[\text{المميزة}]{\text{المعادلة}} m^2+1 = 0 \xrightarrow{\text{جذورها}} \begin{cases} m_1 = i \\ m_2 = -i \end{cases}$$

الجذور عقدية غير مكررة فالحل العام للمتجانسة هو:

$$v_h = A_1\cos x + A_2\sin x$$

$$v_p = \frac{1}{D^2+1}(1+e^x) = \frac{1}{1+D^2}\,1 + \frac{1}{1+D^2}\,e^x$$

$1 = e^{0x}$

$$= \frac{1}{D^2+1} e^{0x} + \frac{1}{D^2+1} e^{x} = 1 + \frac{1}{2} e^{x}$$

$$v = A_1 \cos x + A_2 \sin x + 1 + \frac{1}{2} e^{x}$$

نعوض v في التحويل السابق:

$$y = x v = x \left[A_1 \cos x + A_2 \sin x + \dots \right]$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة

×× ×× ××

5 أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة بعد تحويلها إلى معادلة ذات معاملات ثابتة وذلك بإجراء تغيير مناسب على التغير التابع:

$$(1+x^2) y'' + 4x y' + 2y = 2x$$

الحل: المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب على الشكل:

$$y'' + \frac{4x}{1+x^2} y' + \frac{2}{1+x^2} y = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$P(x) = \frac{4}{1+x^2} \quad \text{and} \quad Q(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

$$P'(x) = 2 \cdot \frac{2-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$Q(x) - \frac{1}{4} P^2(x) - \frac{1}{2} P'(x) =$ بعد التعويض والإصلاح ... $= 0$

إذن التحويل: $k = 0$

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)\,dx} \cdot v$$

يحول المعادلة المعطاة إلى الشكل:

$$v'' + k v = f(x) \cdot e^{\frac{1}{2}\int P(x)\,dx}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)\,dx} \cdot v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{4x}{1+x^2}\,dx} \cdot v(x) = e^{-\ln|1+x^2|} \cdot v(x) = \frac{1}{1+x^2} v(x)$$

يحولها إلى:

$$v'' = 2x$$

نوجد v مباشرة بالمكاملة مرتين

$$v' = x^2 + c_1 \rightarrow v = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

نعوض في التحويل فيكون:

$$y = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x^4}{3} + c_1 x + c_2\right)$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة .

** ** **

س٣ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية بعد تحويلها إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة بإجراء تغيير مناسب على المتحول التابع :

$$x^2y'' - 4xy' + (6-x^2)y = xe^x$$

الحل :

المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب على الصيغة :

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \left(\frac{6}{x^2}-1\right)y = xe^x$$

$$p(x) = -\frac{4}{x} \Rightarrow p^2(x) = \frac{4}{x^2} \qquad \text{and} \qquad Q(x) = \frac{6}{x^2}-1$$

$$Q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) = \frac{6}{x^2} - 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{16}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x^2}\right)$$

$$= \frac{6}{x^2} - 1 - \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^2} = -1$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} \cdot v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int -\frac{4}{x}dx} v(x) = e^{2\int\frac{dx}{x}} v(x)$$

$$y = e^{\ln x^2} \cdot v(x) = x^2 v(x)$$

المعادلة تتحول إلى الشكل :

$$v'' - v = xe^x e^{-\frac{1}{2}\int -\frac{4}{x}dx}$$

$$= xe^x e^{\ln\frac{1}{x^2}}$$

$$v'' - v = \frac{e^x}{x}$$

$$y_h = A_1 e^x + A_2 e^{-x}$$

لإيجاد y_p :

ملاحظة: لا تصلح طريقتي المؤثر التفاضلي المكسي والمعاملات غير المعينة في إيجاد الحل الخاص عندما تكون الدالة $f(x)$ تملك عدداً غير منتهٍ من المشتقات العليا.

$f(x)$ في مثالنا هي $\frac{e^x}{x}$.

إذاً علينا استخدام طريقة لاغرانج :

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w}\, dx + y_2 \int \frac{w_2}{w}\, dx$$

$$w(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \frac{e^x}{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} \qquad w_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x}$$

$$y_p = e^x \int \frac{-\frac{1}{x}}{-2}\, dx + e^{-x} \int \frac{\frac{e^{2x}}{x}}{-2}\, dx$$

$$y_p = \frac{e^x}{2} \ln x - \frac{e^{-x}}{2} \int \frac{e^{2x}}{x}\, dx$$

الحل العام عندئذ يكون:

$$y = x^2\left[A_1 e^x + A_2 e^{-x} + \frac{e^x}{2} \ln x - \frac{e^{-x}}{2} \int \frac{e^{2x}}{x}\, dx\right].$$

xx xx xx xx

[-7] أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x^2 y'' + 2x^2 y' + (x^2 - 2) y = x^3 e^{-x}$$

الحل:

المعادلة التفاضلية تكتب على الشكل:

$$y'' + 2y' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = x e^{-x}$$

$Q(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$ $\qquad P(x) = 2$ $\qquad P'(x) = 0$

$$Q(x) - \frac{1}{4} P^2(x) - \frac{1}{2} P'(x) = -\frac{2}{x^2} = \frac{k}{x^2} \;;\quad k = -2$$

بالتالي فإن التحويل :

$y = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx} \cdot v(x) = e^{-x}\, v(x)$

يحوّل المعادلة المعطاة إلى الشكل :

$x^2 v'' - 2v = x^3$

وهي معادلة أولر

لحلها نفرض أن : $x = e^t$ فيكون : $dx = e^t\, dt$

$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{x}$

$x \cdot v' = D_t v$

$x^2 v'' = D_t (D_t - 1) v$

$D_t (D_t - 1) v - 2v = e^{3t}$

$(D_t^2 - D_t - 2) v = e^{3t}$

المعادلة المميزة :

$m^2 - m - 2 = 0$

$(m-2)(m+1) = 0$

$m_1 = 2 \qquad m_2 = -1$

المعادلة المتجانسة المناظرة :

$(D_t^2 - D_t - 2) v = 0 \qquad v_h = A_1 e^{2t} + A_2 e^{-t}$

$v = v_h + v_p$

$v_p = \frac{1}{D^2 - D - 2} e^{3t} \rightarrow v_p = \frac{1}{4} e^{3t}$

$v = A_1 e^{2t} + A_2 e^{-t} + \frac{1}{4} e^{3t}$

$v = A_1 x^2 + \frac{A_2}{x} + \frac{1}{4} x^3$

التحويل $y = e^{-x}\, v(x)$

$\Rightarrow y = e^{-x}\left(A_1 x^2 + \frac{A_2}{x} + \frac{1}{4} x^3 \right)$

. x x x x x x x x

/ /

8) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$(x^2)y'' - x(2x+3)y' + (x^2+3x+3)y = (6-x^2)e^x$$

- الحل :

$$y'' - \left(2 + \frac{3}{x}\right)y' + \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right)y = \left(\frac{6}{x^2} - 1\right)e^x$$

$$Q(x) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} \qquad P(x) = -2 - \frac{3}{x} \qquad P'(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$Q(x) - \frac{1}{4}P^2(x) - \frac{1}{2}P'(x) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{4}\left(-2 - \frac{3}{x}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{3}{x^2}$$

$$= \dots = -\frac{3}{4}\,\frac{1}{x^2}$$

أي إن $k = \frac{-3}{4}$

$$y = e^{\frac{1}{2}\int\left(2+\frac{3}{x}\right)dx}\, v(x) \rightarrow y = e^x\, x^{\frac{3}{2}}\, v(x). \quad (*)$$

التحويل السابق يحوّل المعادلة السابقة إلى المعادلة :

$$x^2 v'' - \frac{3}{4}v = x^2\left(\frac{6}{x^2} - 1\right)e^x \cdot e^{\frac{1}{2}\int -2 - \frac{3}{x}dx}$$

$$x^2 v'' - \frac{3}{4}v = (6 - x^2)\, x^{-\frac{3}{2}}$$

وهي معادلة أولر

$$D_t(D_t - 1)v - \frac{3}{4}v = (6 - e^{2t})\, e^{-\frac{3}{2}t}$$

$$(D_t^2 - D_t - \frac{3}{4})v = 6e^{-\frac{3}{2}t} - e^{\frac{1}{2}t}$$

المعادلة المميزة للمتجانسة المناظرة : $m^2 - m - \frac{3}{4} = 0$

$$m_1 = \frac{3}{2} \quad \text{and} \quad m_2 = -\frac{1}{2}$$

$$v_h = A_1 e^{\frac{3}{2}t} + A_2 e^{-\frac{1}{2}t} = A_1 x^{\frac{3}{2}} + A_2 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$v_p = \frac{1}{D^2 - D - \frac{3}{4}}\, 6 \cdot e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{D^2 - D - \frac{3}{4}}\, e^{\frac{1}{2}t}$$

$$v_p = 6 \cdot \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{\frac{9}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}} - \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}}\, e^{\frac{1}{2}t} \qquad v_p = 2e^{-\frac{3}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}$$

وبالتالي فإن :

$$v = A_1 x^{\frac{3}{2}} + \frac{A_2}{\sqrt{x}} + 2x^{-\frac{3}{2}} + \sqrt{x}$$

نعوض v في التحويل (*) نجد الحل العام

H.Ismail